Über mathematische Modellierungskunst

26.11.2002

„Wenn du von deinen 5 Bonbons 3 abgibst, wie viele hast du dann noch?“ Um diese Aufgabe zu mathematisieren, braucht ein Kind wahrscheinlich noch nicht einmal rechnen zu können, die Fähigkeit zu zählen reicht für die **Modellierung** schon völlig aus. Aus gutem Grund geht man aber schon in der ersten Schulklasse zum Rechnen über. Das Zählen ist mühsam und zeitaufwändig, mit dem Rechnen geht alles viel schneller. Und ich komme eben auch bei 885 und 883 Bonbons zum Ergebnis.

Nach vier Schuljahren ist uns das Rechnen so in Fleisch und Blut über gegangen, dass uns gar nicht mehr bewusst ist, mit einem mathematischen Modell zu operieren. Wer überlegt schon, dass z.B. das Modell 1 + 1 = 2 für ein verliebtes Kaninchenpärchen ☺ nicht vorbehaltlos anwendbar ist?

Bei gewissen Textaufgaben tritt dann aber die Schwierigkeit zu Tage, die viele mit der Modellierung haben: „Muss ich hier plus oder minus rechnen??“ Je komplizierter der Aufgabentext, d.h., je mehr relevante und irrelevante Informationen er enthält, und je mehr Beziehungen abgebildet werden müssen, desto schwieriger wird die Modellfindung. Obwohl letztlich doch immer nur die Grundrechenarten gefragt sind: **Das Mathematisieren ist irgendwann viel schwieriger als das Rechnen selbst**.

Um Schülern hierbei zu helfen, stellt man Verbindungen her zwischen gewissen wiederkehrenden Formulierungen (vermindern, hinzufügen etc.) und den zur Abbildung geeigneten Rechenoperationen. Hierbei ist uns noch sehr bewusst (den Schülern an dieser Stelle zum ersten Mal überhaupt), dass wir das tun, was man Mathematisieren nennt.

Aber schon bei der Einführung von Variablen oder erst recht beim Aufstellen von Gleichungen wissen wir eigentlich nicht mehr, was wir tun. Die meisten Lehrer würden sagen: Na klar, das ist nur die nächst höhere Stufe der Modellierungskunst. Und da irren sie. Jeder von uns kennt das unbefriedigende Gefühl, das uns im Studium befallen hat, wenn uns für die Lösung einer bestimmten Sorte von Differentialgleichungen ein sogenannter „**Ansatz**“ präsentiert wird, der eigentlich nur dadurch gerechtfertigt ist, dass er letztlich zum Ziel führt, nämlich zur Lösung des Problems. Das Aufstellen von Gleichungen in der Schule ist aber für viele Schüler ein vergleichbares Erlebnis: Sie können den Ansatz nicht nachvollziehen. Und ihre Lehrer verlieren das Bewusstsein dafür, dass Variablen und Gleichungen nur **Techniken** sind, die einem die eigentliche, zunehmend komplizierter werdende Modellierung ein Stück weit abnehmen. Wenn in einem Text vier Zahlenangaben stehen, für die es 24 Permutationen gibt und die auf 4^3 verschiedene Arten durch Rechenzeichen verknüpft werden können, gibt es (äquivalente Vertauschungen nicht abgerechnet) schon ohne Klammern 1536 Modelle, von denen höchstens eines zutrifft. Eine Gleichung reduziert den Modellierungsaufwand und macht einen größeren Teil der Aufgabe der Algorithmierung zugänglich. Mir ist heute klar geworden, dass die wahre **Modellierungskunst** eigentlich darin besteht, ein Problem auf ein möglichst grundlegendes Modell abzubilden. Denn die Frage: „Was muss ich eigentlich rechnen?“ ist viel schwieriger zu beantworten als die Frage: „Wie stelle ich eine Gleichung auf und löse sie?“

Folgende Beispiele die ich im Unterricht selbst erlebt habe, mögen das verdeutlichen.

1.) Aufgabe: *Fasane und Kaninchen zählen zusammen 35 Köpfe und 94 Beine. Wieviele Fasane und Kaninchen sind es?*

Mein Lösungsweg mit einer siebenten Klasse, der ich die **Nützlichkeit von Gleichungen** demonstrieren zu können hoffte:

a) Definition einer Variablen und stückweise Abbildung der Text-Angaben und ihrer Beziehungen:

x	:= Anzahl der Kaninchen
35 – x	= Anzahl der Fasane
4 x	= Anzahl der Kaninchenbeine
2 (35 – x)	= Anzahl der Fasanenbeine

b) Aufstellen einer Gleichung mit dem **Ansatz**: Kaninchenbeine + Fasanenbeine = Gesamtbeine

$$
\begin{aligned}
4x + 2(35 - x) &= 94 \\
4x + 70 - 2x &= 94 \\
2x + 70 &= 94 \quad \mid -70 \\
2x &= 24 \quad \mid :2 \\
x &= 12
\end{aligned}
$$

c) Antwort: Es sind 12 Kaninchen und 35 – 12 = 23 Fasane.

Der Weg einer Schülerin:

„Alle 35 Tiere haben doch mindestens 2 Beine, und wenn ich diese 70 Beine von den 94 abziehe, gehören die restlichen 24 Extra-Beine den Kaninchen. Da jedes Kaninchen gegenüber den Fasanen 2 zusätzliche Beine hat, sind es also 12 Kaninchen."

Ihre Rechnung also: **(94 – 2 · 35) : 2** = 12

Wie man sieht, erscheinen in der Rechnung der Schülerin genau jene Rechenoperationen, die auch beim Lösen der Gleichung durchgeführt werden: Beim Ausmultiplizieren der Klammer: 2 · 35 ; später beim Umformen: – 70 und : 2 . Welcher Lehrer wäre in der Lage gewesen, die genaue Bedeutung der eigentlichen Rechenoperationen (ihren Bezug zum Aufgabeninhalt) zu erklären? Man ist es doch gewohnt, die Modellierungstätigkeit nach dem Aufstellen der Gleichung als erledigt zu betrachten und sich gedankenlos dem erprobten **Algorithmus** anzuvertrauen. Die Kunst der Schülerin aber ist viel höher einzuschätzen, denn sie konnte die Aufgabe auf ein viel elementareres Modell, nämlich auf die Grundrechenarten zurückführen.

Noch erstaunlicher ist die Leistung derselben Schülerin beim zweiten Beispiel.

2.) Aufgabe: *Für eine Autofahrt, die 645 km über die Autobahn und 90 km über Landstraße führen wird, hat eine Frau ausgerechnet, dass sie 7,5 Stunden brauchen wird, wenn sie auf der Autobahn doppelt so schnell fährt wie auf der Landstraße. Mit welchen Geschwindigkeiten hat sie gerechnet?*

Mein Lösungsweg mit einer achten Klasse, der ich die **Nützlichkeit von Bruchgleichungen** demonstrieren zu können hoffte:

a) Definition einer Variablen und stückweise Abbildung der Text-Angaben und ihrer Beziehungen:

v := Durchschnittsgeschwindigkeit auf der Landstraße in km/h

$2v$ = Durchschnittsgeschwindigkeit auf der Autobahn in km/h

7,5 = Gesamtzeit in Stunden

$\frac{645}{2v}$ = Zeit auf der Autobahn (wegen $t = \frac{s}{v}$, aus der Physik bekannte Formel)

$\frac{90}{v}$ = Zeit auf der Landstraße

b) Aufstellen einer Bruchgleichung mit dem **Ansatz**: Gesamtzeit = Autobahnzeit + Landstraßenzeit

$$7{,}5 = \frac{645}{2v} + \frac{90}{v}$$

Erweitern auf den Hauptnenner 2 v und anschließende Multipliklation mit demselben liefert:

$$7{,}5 \cdot 2v = 645 + 2 \cdot 90$$

$$
\begin{aligned}
(7{,}5 \cdot 2)\, v &= 645 + 180 \\
15\, v &= 825 \qquad \mid :15 \\
v &= 55
\end{aligned}
$$

c) Antwort: Die Landstraßengeschwindigkeit betrug 55 km/h, die Autobahngeschwindgigkeit 110 km/h.

Der Weg der Schülerin:
„Angenommen, das Auto führe die ganze Zeit mit Autobahngeschwindigkeit, dann würde es während der Landstraßenzeit nicht nur 90 Kilometer zurücklegen, sondern 2 · 90 = 180. Also schafft es insgesamt 645 + 180 = 825 Kilometer in siebeneinhalb Stunden. Nun muss ich nur noch überlegen, wieviele Kilometer es in einer Stunde zurücklegen würde, also 825 : 7,5 = 110, dann habe ich die Autobahngeschwindigkeit."

Ihre Rechnung also: **(645 + 2 · 90) : 7,5** = 110

Wieder stelle ich beschämt fest, dass ich die eigentlichen Rechenoperationen gar nicht verstanden, sondern dem Gleichungsalgorithmus überlassen habe. Aus Betriebsblindheit ist mir sogar entgangen, dass ich **redundant** gerechnet habe, nämlich (7,5) · **2 : 2** (versteckt in : 15) und wieder (55) · **2** .
Es ist ja tatsächlich effektiver, zunächst die Autobahngeschwindigkeit 2 v zu ermitteln.
Außerdem braucht die Schülerin keine fertige Formel wie $t = \frac{s}{v}$, sondern greift einfach auf das zurück, was wir intuitiv als Vergleichsmaß für eine Durchschnittsgeschwindigkeit akzeptieren können: Wie viele Kilometer legt ein Objekt in einer Stunde zurück?

Es gibt nicht viele Schüler, die auf einem solch hohen Niveau mathematisch modellieren können. Umso tragischer wäre es, wenn wir ihre Kunst, anstatt sie zu fördern, durch übertriebene **Fixierung auf Algorithmen** erstickten. **Problemlösen** im Unterricht darf sich nicht darin erschöpfen, für jeden Problemtyp nur am Anfang einen Lösungsweg entdecken zu lassen und dann doch möglichst schnell den passenden Algorithmus zu etablieren. Typisches Beispiel: In jeder Klasse gibt es mehrere Schüler, die schon im Schuljahrgang 5 oder 6 Dreisatzaufgaben richtig lösen. Sie wissen intuitiv, wie sie dividieren und multiplizieren müssen, bevor sie je etwas von proportionalen oder antiproportionalen Zuordnungen gehört haben. Dies ist weit höher einzuschätzen als die spätere Beherrschung einer routinierten Dreisatztechnik. **Denn je elementarer das mathematische Modell, desto schwieriger ist es, einen Aufgabengehalt darin einzukleiden** (so wie auch das Modell „Stoff um die Beine" schwieriger zu handhaben ist als das Modell „Hose").
Dafür abschließend ein definitiver Beleg: Die oben zweimal zitierte, extrem intelligente Schülerin löste in Klasse 7, noch bevor im Unterricht Gleichungen „dran" waren, folgende Aufgabe, weil sie erkannte, wie man rechnen muss. Können Sie das auch, ohne eine Gleichung aufzustellen??
Bürgermeister Joao und ein wichtiger Geschäftsmann namens José geben eine große Grillparty. Abgesehen von José (der Geschäftsmann ist Junggeselle), Joao und seiner Ehefrau ist die Anzahl der übrigen Anwesenden genau gleich hoch wie die Anzahl der 100 € -Scheine, die der Bürgermeister aufwendete, multipliziert mit der Anzahl der 100 € -Scheine, die der Geschäftsmann investieren musste. Im Schnitt verbraucht jeder Anwesende (einschließlich José, Joao und seiner Frau) Speisen und Getränke im Wert von 6,40 €. Wie hoch waren die Kosten für den Geschäftsmann, wenn der Bürgermeister 1700 € bezahlt hat?
Der verflixt komplizierte Lösungsterm: ((1700 – 3 · 6,40) : [(1700 : 100) · 6,40 – 100]) · 100 = 19100 (€)